# TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Terças e Quintas de 8:00 às 10:00 hs

prof. Tania S. Klein

tania@eq.ufrj.br

Lab CFD

# Aula 24

- Radiação entre Superfícies
  - Fator de Forma
    - Definição
    - Relações
  - Radiação entre Corpos Negros
  - Radiação entre Superfícies Opacas, Cinzentas e Difusas num Invólucro

# Fator de Forma

Definição: O fator de forma $F_{ij}$ é a fração da Radiação que deixa a superfície i e que é interceptada pela superfície j:

$$F_{ij} = \frac{q_{i\to j}}{A_i J_i}$$

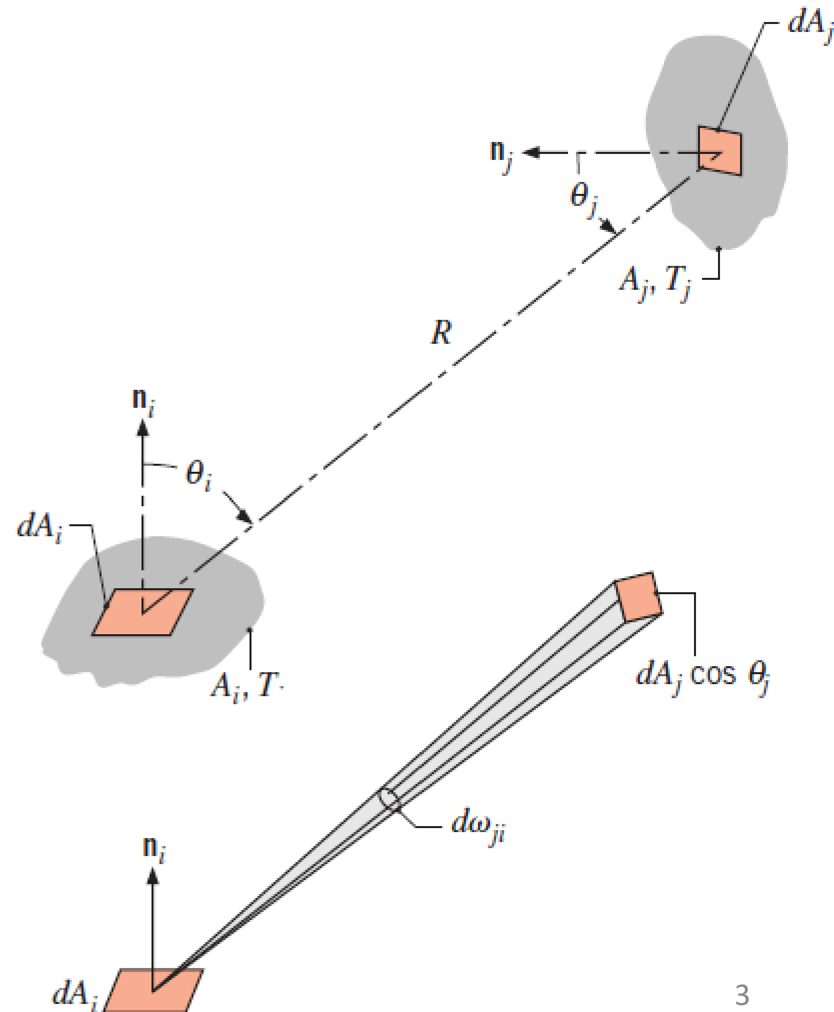
Pela definição de intensidade de radiação, a taxa na qual a radiação deixa $dA_i$ e é interceptada por $dA_j$ é:

$$dq_{i\to j} = I_{e+r,i} \cos\theta_i \, dA_i \, d\omega_{j-i}$$

Onde: $d\omega_{j-i} = (\cos\theta_j \, dA_j)/R^2$

Logo:

$$dq_{i\to j} = I_{e+r,i} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{R^2} dA_i \, dA_j$$



# Fator de Forma

Para uma superfície i difusa, onde $J = \pi I_{e+r}$:

$$dq_{i\to j} = J_i \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i\, dA_j$$

Assim, a taxa total na qual a radiação deixa a superfície i e é interceptada pela superfície j é:

$$q_{i\to j} = J_i \int_{A_i}\int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i\, dA_j$$

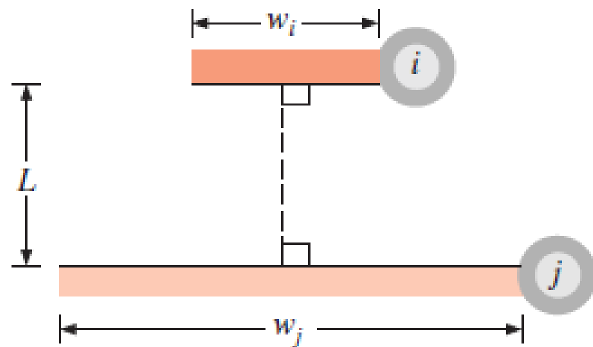
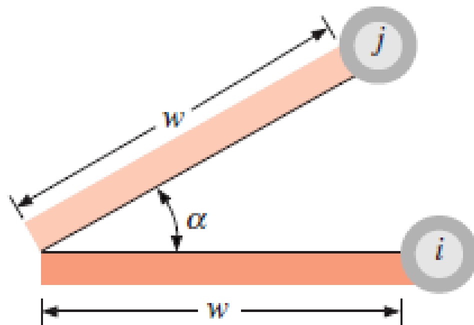
Comparando com a definição, a expressão matemática para $F_{ij}$ é:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i}\int_{A_i}\int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i\, dA_j$$

Expressões para $F_{ij}$ para determinados arranjos encontram-se no livro.

# Fator de Forma

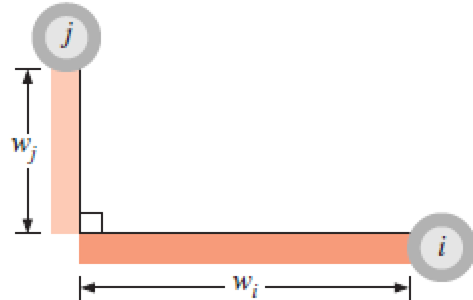
**TABLE 13.1** View Factors for Two-Dimensional Geometries [4]

| Geometry | Relation |
|---|---|
| **Parallel Plates with Midlines Connected by Perpendicular**   | $F_{ij} = \dfrac{[(W_i + W_j)^2 + 4]^{1/2} - [(W_j - W_i)^2 + 4]^{1/2}}{2W_i}$<br>$W_i = w_i/L,\ W_j = w_j/L$ |
| **Inclined Parallel Plates of Equal Width and a Common Edge**   | $F_{ij} = 1 - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ |

# Fator de Forma

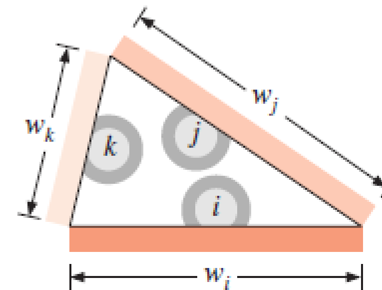
**TABLE 13.1** *Continued*

**Perpendicular Plates with a Common Edge**



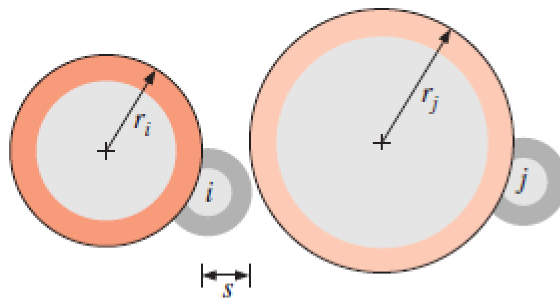

$$F_{ij} = \frac{1 + (w_j/w_i) - [1 + (w_j/w_i)^2]^{1/2}}{2}$$

**Three-Sided Enclosure**




$$F_{ij} = \frac{w_i + w_j - w_k}{2w_i}$$

**Parallel Cylinders of Different Radii**




$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi}\left\{\pi + [C^2 - (R+1)^2]^{1/2} - [C^2 - (R-1)^2]^{1/2} + (R-1)\cos^{-1}\left[\left(\frac{R}{C}\right) - \left(\frac{1}{C}\right)\right] - (R+1)\cos^{-1}\left[\left(\frac{R}{C}\right) + \left(\frac{1}{C}\right)\right]\right\}$$

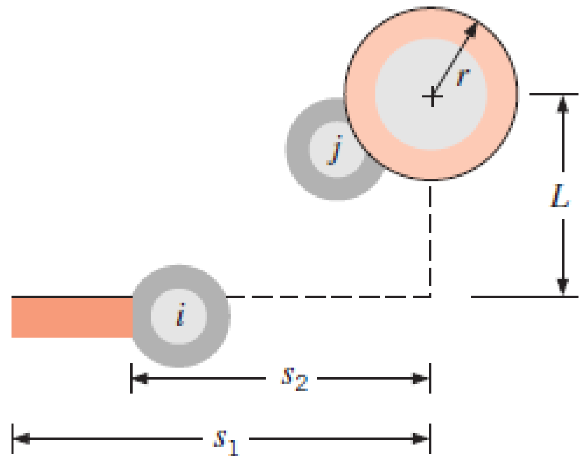
$R = r_j/r_i$, $S = s/r_i$

$C = 1 + R + S$

# Fator de Forma

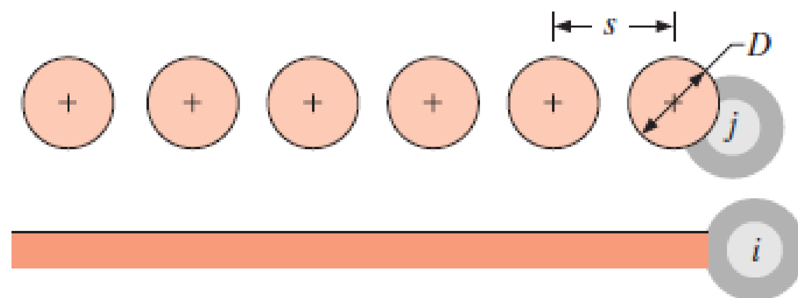
**TABLE 13.1** *Continued*

**Cylinder and Parallel Rectangle**




$$F_{ij} = \frac{r}{s_1 - s_2}\left[\tan^{-1}\frac{s_1}{L} - \tan^{-1}\frac{s_2}{L}\right]$$

**Innite Plane and Row of Cylinders**

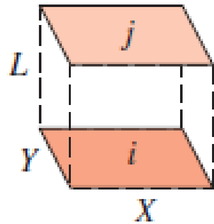



$$F_{ij} = 1 - \left[1 - \left(\frac{D}{s}\right)^2\right]^{1/2} + \left(\frac{D}{s}\right)\tan^{-1}\left[\left(\frac{s^2 - D^2}{D^2}\right)^{1/2}\right]$$

# Fator de Forma

**Aligned Parallel Rectangles**

**(Figure 13.4)**




$\bar{X} = X/L, \bar{Y} = Y/L$

**TABLE 13.2**

$$F_{ij} = \frac{2}{\pi \bar{X}\bar{Y}} \left\{ \ln \left[ \frac{(1+\bar{X}^2)(1+\bar{Y}^2)}{1+\bar{X}^2+\bar{Y}^2} \right]^{1/2} + \bar{X}(1+\bar{Y}^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{\bar{X}}{(1+\bar{Y}^2)^{1/2}} + \bar{Y}(1+\bar{X}^2)^{1/2} \tan^{-1} \frac{\bar{Y}}{(1+\bar{X}^2)^{1/2}} - \bar{X}\tan^{-1}\bar{X} - \bar{Y}\tan^{-1}\bar{Y} \right\}$$

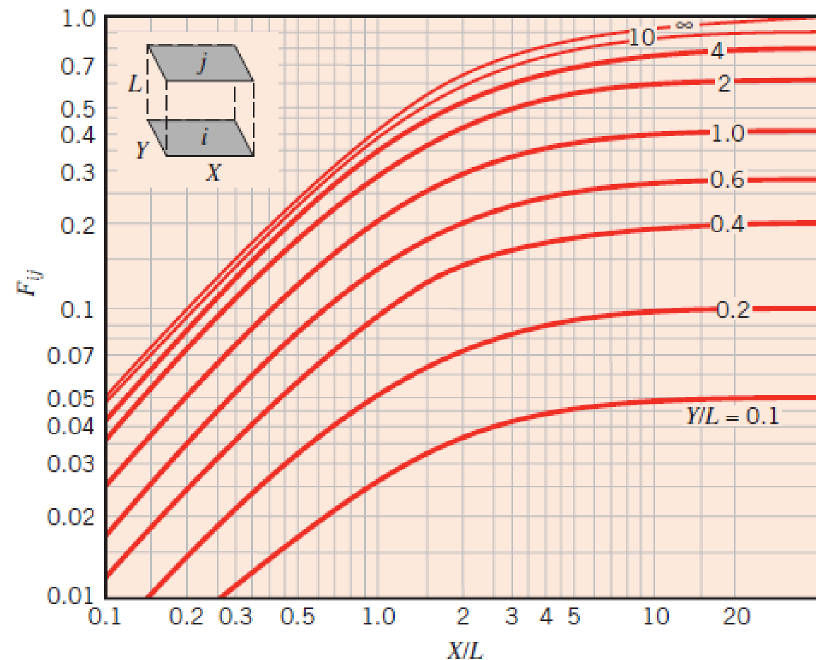
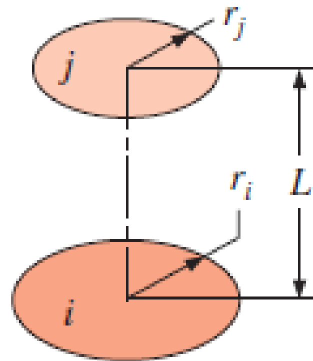



**FIGURE 13.4** View factor for aligned parallel rectangles.

# Fator de Forma

**Coaxial Parallel Disks (Figure 13.5)**

TABLE 13.2




$$R_i = r_i/L, \; R_j = r_j/L$$

$$S = 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2}$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\{S - [S^2 - 4(r_j/r_i)^2]^{1/2}\}$$

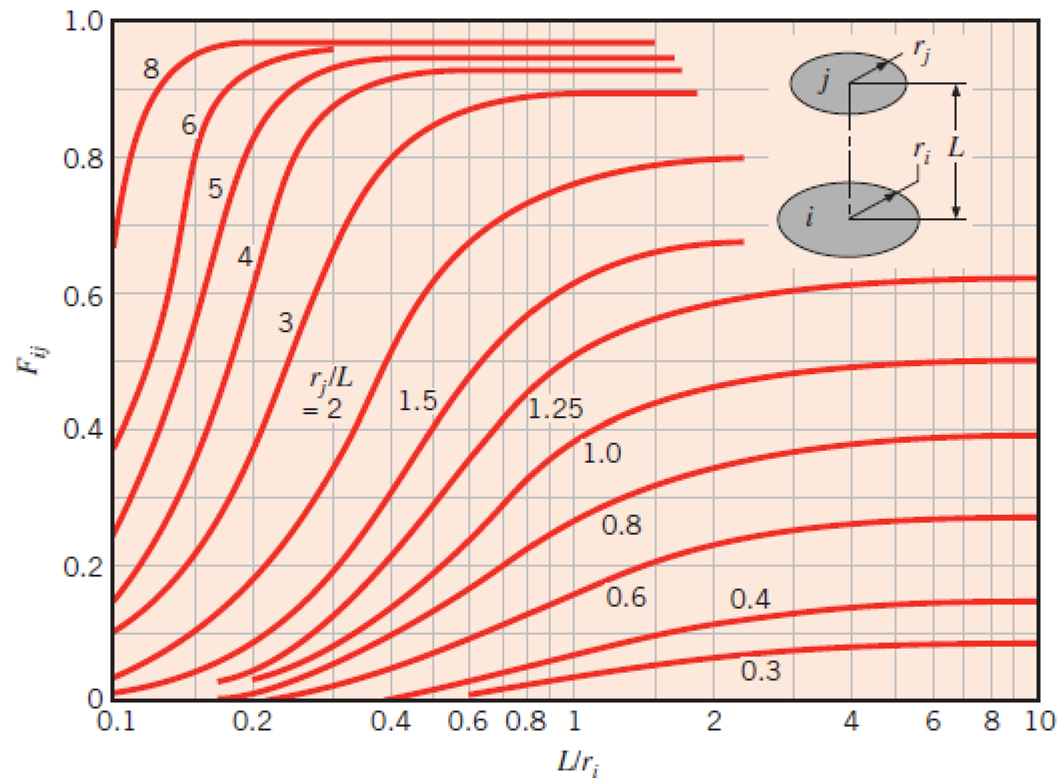
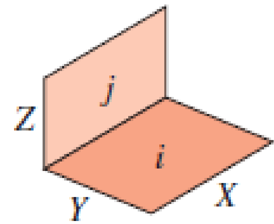



FIGURE 13.5 View factor for coaxial parallel disks.

# Fator de Forma

**Perpendicular Rectangles with a Common Edge (Figure 13.6)**




$H = Z/X,\ W = Y/X$

**TABLE 13.2**

$$F_{ij} = \frac{1}{\pi W}\left(W \tan^{-1}\frac{1}{W} + H \tan^{-1}\frac{1}{H} - (H^2 + W^2)^{1/2}\tan^{-1}\frac{1}{(H^2+W^2)^{1/2}} + \frac{1}{4}\ln\left\{\frac{(1+W^2)(1+H^2)}{1+W^2+H^2}\left[\frac{W^2(1+W^2+H^2)}{(1+W^2)(W^2+H^2)}\right]^{W^2} \times \left[\frac{H^2(1+H^2+W^2)}{(1+H^2)(H^2+W^2)}\right]^{H^2}\right\}\right)$$

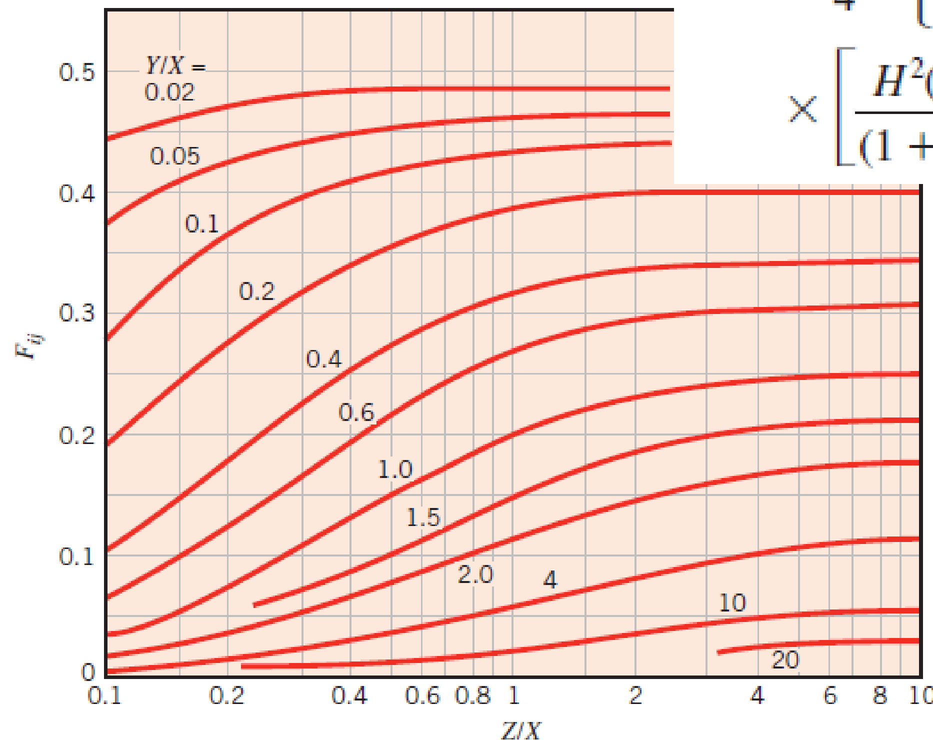



**FIGURE 13.6** View factor for perpendicular rectangles with a common edge.

# Fator de Forma - Relações

Uma vez que

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i \, dA_j$$

Simetricamente:

$$F_{ji} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i \, dA_j$$

Logo:

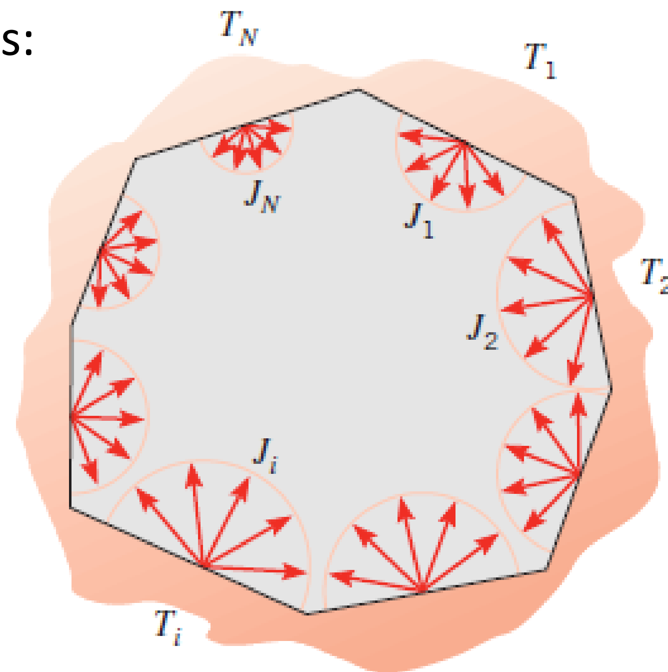
$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

Essa expressão recebe o nome de Relação de Reciprocidade

# Fator de Forma - Relações

Pela definição, num invólucro com N superfícies:

$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1$$




Essa é a Regra do Somatório.

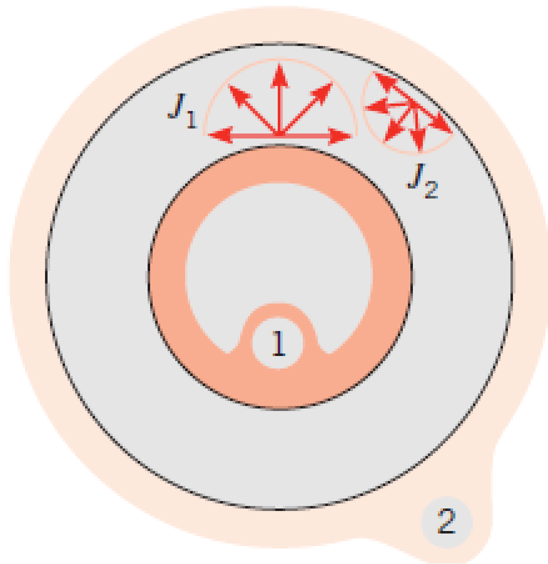
Quando i=j, temos $F_{ii}$, que representa a fração da radiação que deixa i e é diretamente interceptada pela própria superfície i:

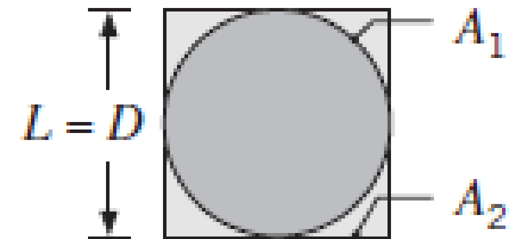
Superfícies côncavas: $F_{ii} \neq 0$;
Superfícies planas e convexas: $F_{ii}=0$;

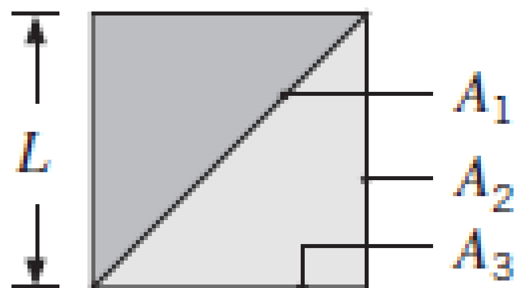
Num invólucro há $N^2$ fatores de forma, porém, devido à regra do somatório e à relação da reciprocidade, apenas N(N-1)/2 fatores de forma precisam ser determinados diretamente.

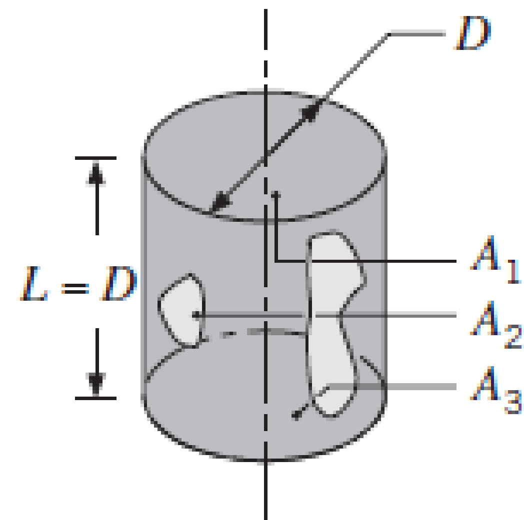
# Fator de Forma - Relações

Exemplos:



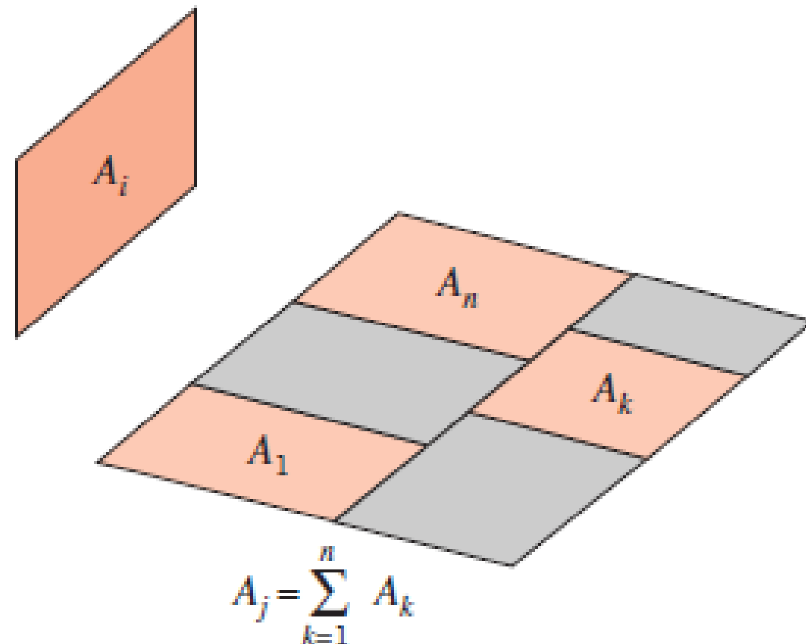



# Fator de Forma - Relações

Considerando uma superfície j subdividida em n partes, decorre que:

$$F_{i(j)} = \sum_{k=1}^{n} F_{ik}$$




Multiplicando ambos os lados por $A_i$ e aplicando a relação da reciprocidade:

$$A_j F_{(j)i} = \sum_{k=1}^{n} A_k F_{ki}$$

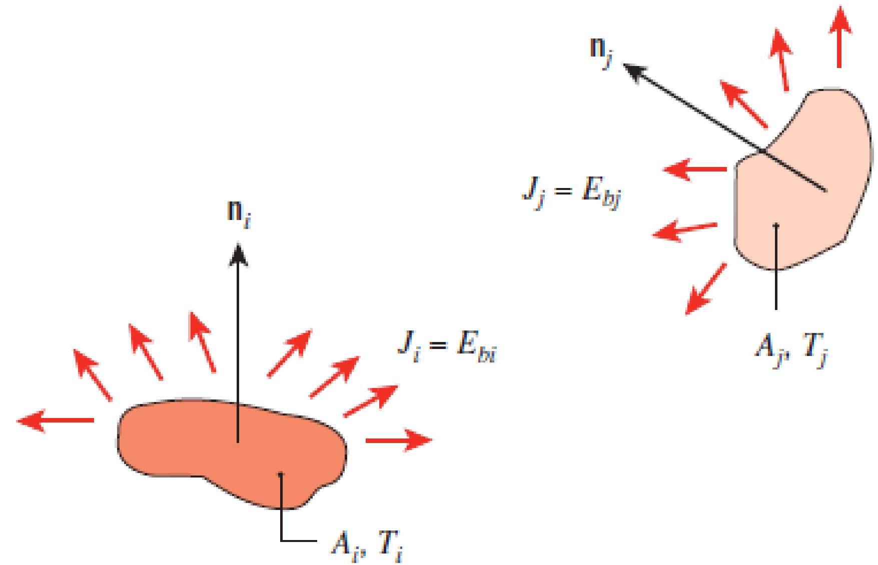
Logo: $$F_{(j)i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k F_{ki}}{\sum_{k=1}^{n} A_k}$$

Válido para superfície de origem decomposta em diversas partes!

# Radiação entre Corpos Negros

Sabemos que:

$$q_{i\to j} = (A_i J_i) F_{ij}$$




Entre duas superfícies negras:

$$q_{i\to j} = A_i F_{ij} E_{bi}$$

Analogamente: $q_{j\to i} = A_j F_{ji} E_{bj}$

A troca radiativa líquida é então: $q_{ij} = q_{i\to j} - q_{j\to i} = A_i F_{ij} E_{bi} - A_j F_{ji} E_{bj}$

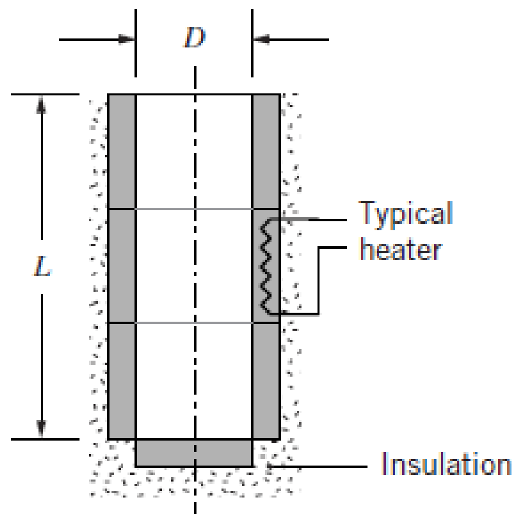
Logo: $q_{ij} = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$

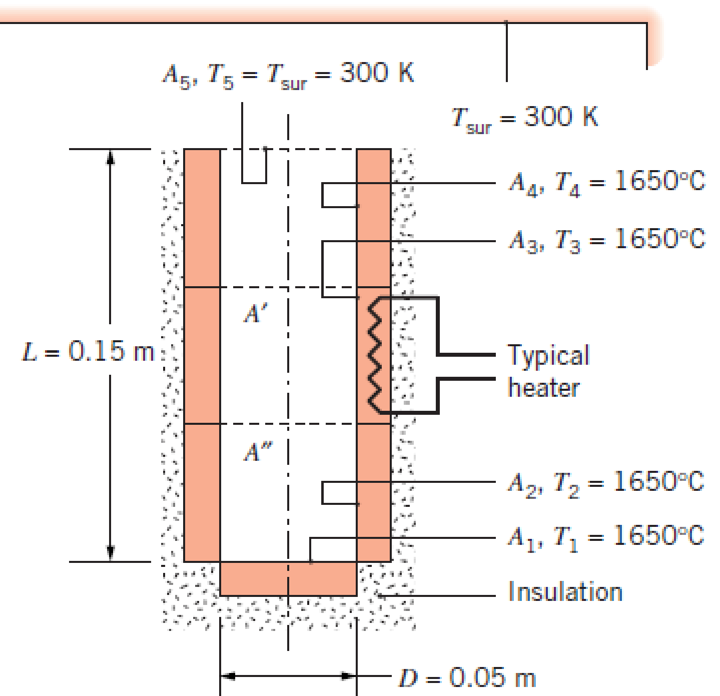
Para N superfícies negras num invólucro, a transferência líquida de radiação da superfície i é:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4)$$

# Radiação entre Corpos Negros

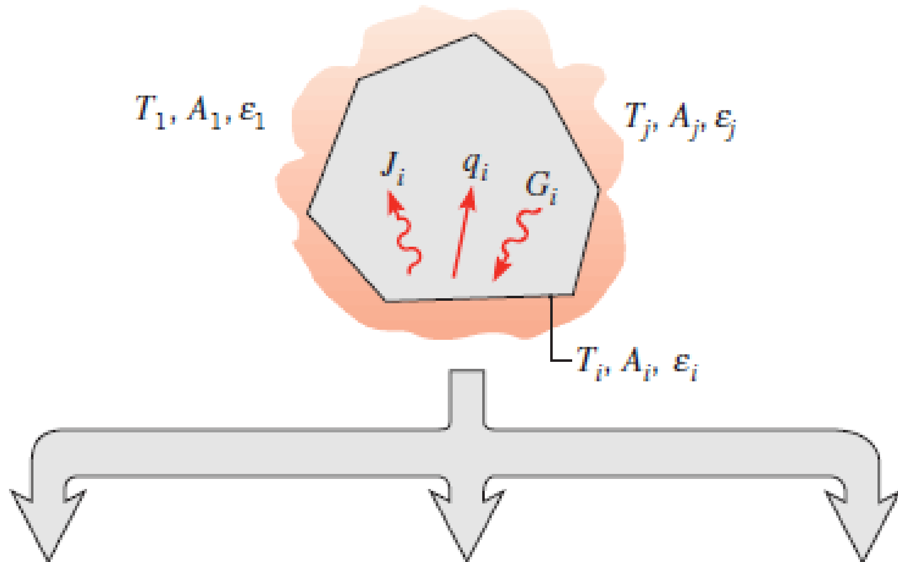
Exemplo 13.3: potência necessária para manter as temperaturas prescritas

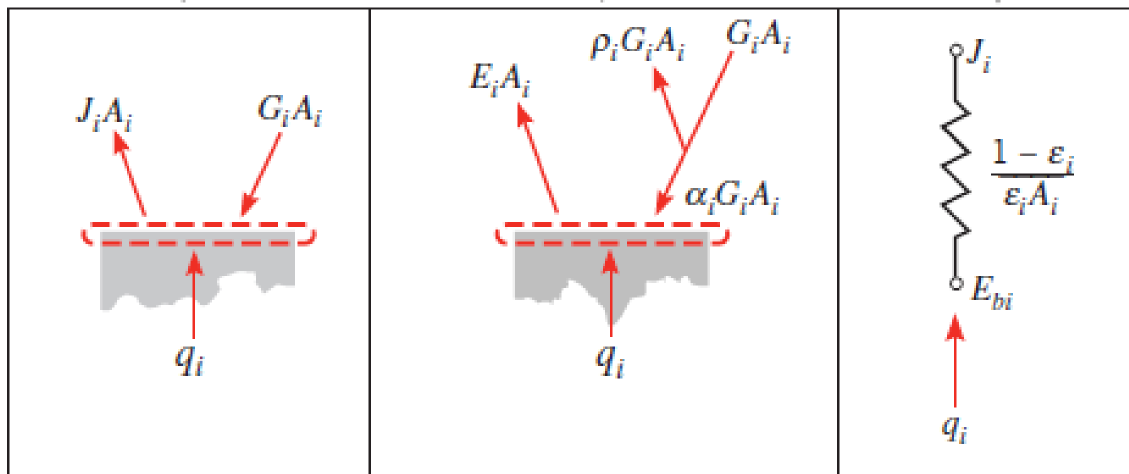


# Radiação entre Superfícies Opacas, Cinzentas e Difusas num Invólucro

Consideremos cada superfície do invólucro como opaca, cinzenta, difusa, isotérmica, com radiosidade e irradiação uniformes e o meio no interior é não participante (vácuo ou muitos gases). Deseja-se saber a taxa de calor radiativo líquido de cada superfície i:




$$q_i = A_i(J_i - G_i)$$

Para uma superfície opaca:

$$q_i = A_i(E_i - \alpha_i G_i)$$

Para uma superfície cinzenta:

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + (1 - \varepsilon_i)G_i$$

Assim:

$$q_i = A_i\left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{bi}}{1 - \varepsilon_i}\right)$$

# Radiação entre Superfícies Opacas, Cinzentas e Difusas num Invólucro

Obtemos então:

$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{(1 - \varepsilon_i)/\varepsilon_i A_i}$$

Por analogia aos circuitos elétricos, a resistência superficial é: $R_{sup} = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i A_i}$

Precisamos então conhecer a radiosidade. Considerando então a troca de calor entre as superfícies do invólucro, a irradiação total recebida pela superfície i é:

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ji} A_j J_j = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{ij} J_j$$

Isolando $G_i$ e usando na expressão de $q_i$:

$$q_i = A_i(J_i - G_i) = A_i\left(J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j\right) = A_i\left(\sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j\right)$$

# Radiação entre Superfícies Opacas, Cinzentas e Difusas num Invólucro

Concluímos que:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{ij}(J_i - J_j) = \sum_{j=1}^{N} q_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{(A_i F_{ij})^{-1}}$$

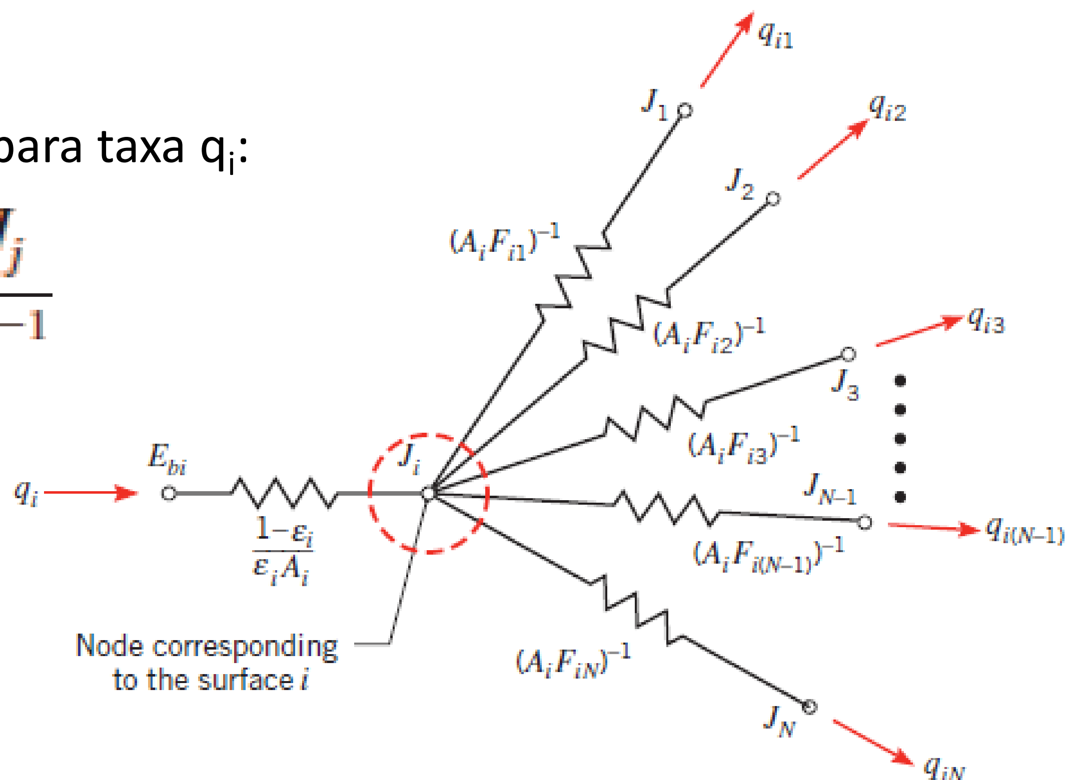
De onde identificamos a resistência espacial entre as superfícies i e j:

$$R_{esp} = \frac{1}{A_i F_{ij}}$$

Podemos igualar as expressões para taxa $q_i$:

$$\frac{E_{bi} - J_i}{(1-\varepsilon_i)/\varepsilon_i A_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{(A_i F_{ij})^{-1}}$$

E montar o circuito do sistema:



# Radiação entre Superfícies Opacas, Cinzentas e Difusas num Invólucro

Exemplo 13.4: Calcular a taxa líquida de transferência de calor para a superfície do absorvedor.

